

## **Краткий конспект**

### **1. Напряженно-деформированное состояние системы**

Идеи повышения эксплуатационной надежности оснований современных зданий и сооружений начали находить возможности своего приложения в практику проектирования достаточно давно. Одно из направлений – увеличение несущей способности грунтового основания за счет армирования грунта. Сама идея об использовании различных разновидностей вертикального и горизонтального армирования слабого грунтового основания в принципе была известна. Так, имели определенное распространение методы глубинной стабилизации слабых грунтов цементными и цементнопесчаными растворами [1, 5, 6]. Увеличение несущей способности горизонтальным армированием основания предложено французскими учеными J. Binguet, K. Lee [7]. Авторами [7] показано, что горизонтальное армирование основания при трех слоях армирования синтетическими материалами в 1,6 раза увеличило несущую способность основания. Исследования горизонтально армированных оснований проводились также в университете штата Сан-Диего. Авторами было доказано, что несущая способность горизонтально армированного песчаного основания в зависимости от его плотности увеличивается от 1,2 до 1,6 раз. Перечисленные выше сведения об армировании грунтового основания можно отнести к «пассивным» системам повышения несущей способности оснований. В работах [2, 3] ставится вопрос об «активных» методах управления эксплуатационной надежностью и напряженно-деформированным состоянием основания. Идея активности методов управления эксплуатационной надежностью строительных конструкций вообще и оснований зданий и сооружений в частности неразрывно связана с теорией автоматического управления, методология которого применительно к регулированию напряженно-деформированного

состояния (НДС) строительных конструкций существует только в виде отдельных положений.

В работах Землянского А.А. принцип активности методов управления предлагается осуществлять за счет активного горизонтального армирования грунта с помощью шпунтовой стенки или полых рабочих свай с обеспечением возможности перемещений их боковых поверхностей (рис. 1). Активное армирование основания за счет давления преднапряжения в армирующей системе позволяет, как это экспериментально подтверждено в [2–4], повысить прочность и устойчивость слабых грунтов.

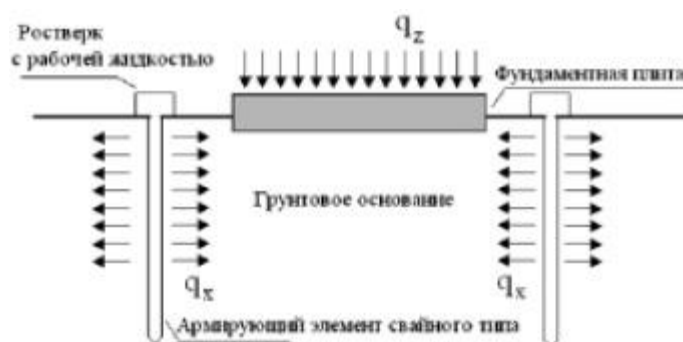


Рис. 1. Схема активного армирования основания

Непосредственной причиной повышения несущей способности грунтового основания, армированного активной горизонтальной системой, является предварительное напряжение грунтовой массы основания под фундаментной плитой. Теоретически учет такого преднапряжения связан с проявлением распределительных свойств грунта. Для этого необходима математическая модель основания, учитывающая полный вектор перемещений (вертикальные и горизонтальные перемещения).

Для выявления особенностей НДС преднапряженного основания использована модель, представленная на рис. 2, а. Данная модель представляет собой грунтовый массив, ограниченный с двух сторон достаточно протяженными по длине армирующими элементами, создающими кинематическое нагружение. Эти условия позволяют перейти от решения трехмерной задачи к решению плоской симметричной задачи и сократить тем самым количество вычислений.

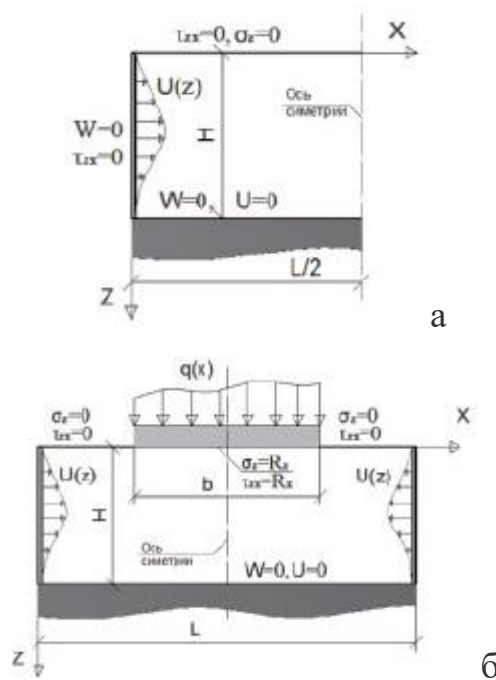


Рис. 2. Расчетная схема преднапряженного основания: а – при отсутствии вертикальной нагрузки; б – при наличии нагруженной фундаментной плиты

Рассматривая грунтовый массив как линейно деформируемую среду, в качестве неизвестных приняты вертикальные и горизонтальные компоненты ( $W(x, z)$ ,  $U(x, z)$ ) вектора перемещений. В этом случае разрешающими уравнениями являются уравнения Ляме для плоской задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \lambda \nabla^2 \Delta U = 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \lambda \nabla^2 \Delta W = 0, \end{cases} (1)$$

$$\text{где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \Delta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\lambda = \frac{1-\bar{\mu}}{1+\bar{\mu}}; \bar{\mu} = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Расчетная схема преднапряженного основания без вертикального давления с граничными значениями перемещений и напряжений представлена на рис. 2. Для дискретизации этой модели в области интегрирования использован метод конечных разностей. В качестве исходных данных приняты следующие параметры:  $H = 10$  м,  $L = 40$  м,  $E_{\text{гр}} = 20000$  кПа,  $\nu = 0,5$ , где  $H$  и  $L$  – размеры области интегрирования;  $E_{\text{гр}}$  – модуль деформации грунта;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Предварительное напряжение грунта в данном случае задается в виде функции кинематического перемещения стенок армирующего элемента

$$U(z) = 0,1 \left\{ \sin \left( \frac{z}{H} \pi \right) \right\}^3.$$

Эпюры перемещений основания  $W(x, z)$ ,  $U(x, z)$  представлены на рис. 3.

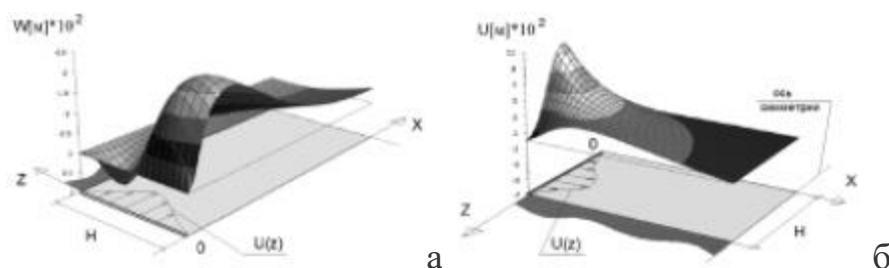


Рис. 3. Эпюры перемещений слоя основания: а – вертикальных ( $W$ ); б – горизонтальных ( $U$ )

На рис. 3, а можно наблюдать вертикальный выпор грунта вблизи зоны кинематического нагружения, убывающий по глубине слоя основания. Этот эффект обуславливает снижение осадок фундаментной конструкции при вертикальной нагрузке на армированный массив. В связи с принятой формой эпюры нагружения  $U(z)$  значения вертикальных перемещений вдоль оси  $Z$  приобретают обратный знак. Горизонтальные перемещения затухают ближе к оси симметрии (рис. 3, б).

НДС преднапряженного основания напрямую зависит от условий взаимодействия армирующего элемента с грунтовым массивом. Эпюры на рис. 3 соответствуют граничному условию, предполагающему отсутствие вертикальных перемещений грунта по поверхности армирующего элемента ( $W_{гр} = 0$ ). При условии отсутствия касательных напряжений на границе армирования ( $\tau_{гр} = 0$ ), предполагающем свободное перемещение грунта по армирующему элементу, картина распределения перемещений грунтового массива качественно изменяется. Для наглядности сравним перемещения поверхности армированного основания с различными граничными условиями (рис. 4). Функция кинематического перемещения по высоте слоя при этом принята постоянной ( $U(z) = 0,2$  м). Как видно из графиков на рис. 4, а, при условии ( $\tau_{гр} = 0$ ) максимальные вертикальные перемещения поверхности

основания  $W(x)$  концентрируются у границы активного армирования. При условии ( $W_{гр} = 0$ ) максимальный выпор грунта находится на некотором удалении от этой границы.

Условию ( $\tau_{гр} = 0$ ) соответствует большее абсолютное значение вертикальных перемещений. Также видно, что независимо от граничных условий вертикальные перемещения поверхности основания затухают по мере удаления от границы основания, взаимодействующей со шпунтом. То же происходит и с горизонтальными перемещениями  $U(x)$  (рис. 4, б).

При рассмотрении системы «фундаментная плита – преднапряженное основание», помимо граничных условий в постановке задачи, на НДС системы также существенное влияние оказывает положение армирующего элемента относительно фундаментной плиты и по высоте слоя основания. Попробуем проследить влияние рассмотренных различий в постановке задачи на НДС системы «фундаментная плита – преднапряженное основание». Для выявления особенностей НДС грунтового массива при сложном напряженном состоянии использована модель, представленная на рис. 2, б. В отличие от предыдущей модели, на рассматриваемый преднапряженный объем грунта опирается плита с соотношением сторон  $l/b > 10$  нагруженная равномерно распределенной нагрузкой. Считается, что поверхность контакта балки и основания является абсолютно гладкой, а реакции контакта направлены по нормали к этой поверхности. Также предполагается, что вертикальные перемещения поверхности основания и нижней поверхности балки происходят совместно без отрыва, и величина вертикального давления, передаваемого на поверхность основания со стороны балки, равна вертикальному отпору  $R_z(x)$ . Вертикальный отпор связан условием равновесия балки с величиной ее изгибной жесткости ( $EJ$ ) и характером нагрузки  $q(x)$ :

$$R_z(x) = q(x) - EJ \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} \quad (2)$$

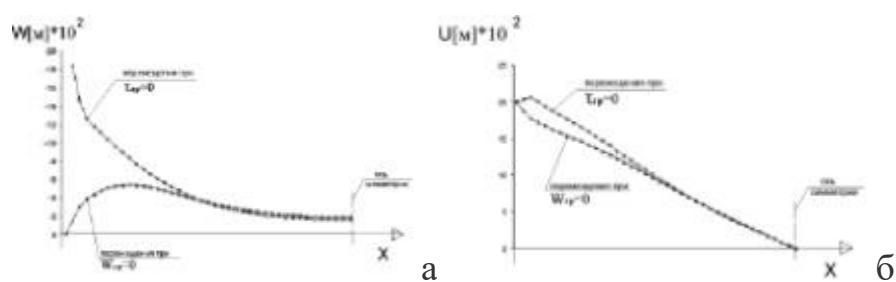


Рис. 4. Эпюры перемещений поверхности основания: а – вертикальных –  $W(x)$ ; б – горизонтальных –  $U(x)$

Решение задачи находится на основе совместного решения системы уравнений Ляме (1) с уравнением изгиба балки (2), входящим в систему уравнений через граничные условия, записанные для участка поверхности основания, контактирующего с балкой.

На рис. 5 представлены эпюры вертикальных перемещений поверхности основания  $W(x)$  при различных граничных условиях контакта грунта с армирующим элементом.

Для исходных данных приняты следующие параметры:  $H = 30$  м,  $L = 40$  м,  $E_{гр} = 20000$  кПа,  $E_b = 21000000$  кПа,  $\nu = 0,5$ ,  $h_b = 1$  м,  $q(x) = 500$  кН/м,  $L/b = 1,5$ .

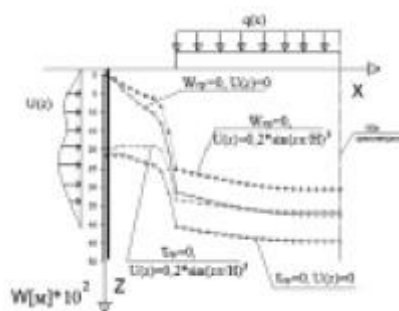


Рис. 5. Перемещения поверхности основания  $W(x)$  под фундаментной плитой

Как видно из графиков (рис. 5), кинематическое нагружение грунта способствует снижению вертикальных осадок фундаментной плиты на 18 %. Наибольший эффект наблюдается при отсутствии вертикальных перемещений грунта по поверхности армирующего элемента ( $W_{гр} = 0$ ). Отсутствие касательных напряжений ( $\tau_{гр} = 0$ ) в данном случае ухудшает работу грунтового массива и увеличивает осадки на 20 %.

Оценивая снижение осадок фундаментной плиты, следует принимать во внимание упругую работу грунта под нагрузкой. В рассматриваемой линейной постановке задачи снижение осадок плиты прямо пропорционально увеличению величины кинематического нагружения. Особенности данной математической модели также можно отметить на эпюрах распределения напряжений в основании. Качественная картина распределения нормальных и касательных напряжений  $\sigma_z$  и  $\tau_{zx}$  для системы «фундаментная плита – преднапряженное основание» представлена на рис. 6.

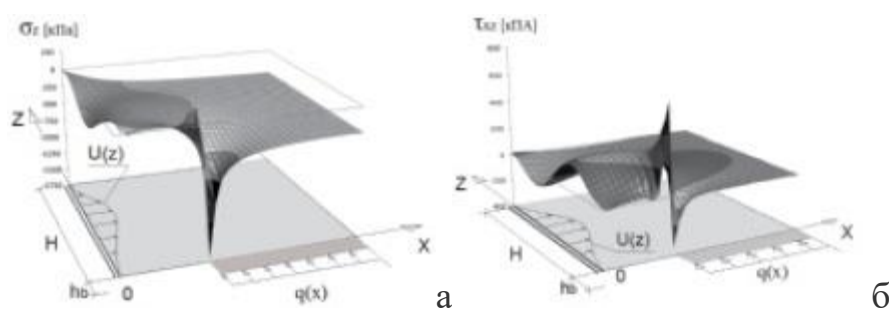


Рис. 6. Эпюры напряжений слоя основания: а – нормальных ( $\sigma_z$ ); б – касательных ( $\tau_{zx}$ )

Вдоль поверхности армирующего элемента присутствуют характерные очертания эпюр нормальных и касательных напряжений, обусловленные кинематическим нагружением (рис. 6). Максимальная же концентрация напряжений находится под торцом балки. Напряжения в этом месте возрастают по мере сгущения конечно-разностной сетки. При таких значениях напряжений в грунте, как правило, происходит развитие зон предельного равновесия, и грунт переходит в пластическую стадию работы. Для данной модели это обстоятельство накладывает соответствующие ограничения на величину вертикальной нагрузки.

При анализе величины абсолютных осадок фундаментной плиты следует учесть влияние положения армирующего элемента относительно фундаментной плиты и по глубине слоя основания. По мере смещения армирующего элемента к краю плиты наблюдается снижение ее осадок. Вместе с тем усиливается и влияние рассмотренных краевых эффектов.

Таким образом, напряженно-деформируемое состояние системы «фундаментная плита – преднапряженное основание» определяется многими факторами. Использование приведенной математической модели в рамках упругой задачи позволяет выделить наиболее существенные из них для более точной оценки НДС основания с активным армированием. В частности, при формулировке граничных условий необходимым является учет сил трения между грунтом и армирующим элементом, отражающий характер их взаимодействия. Также необходимым является учет неупругих свойств грунтовой среды. Для данной модели линейно-деформированного основания при активном армировании наблюдается снижение осадок фундаментной плиты под нагрузкой пропорционально увеличению величины кинематического нагружения, что дает повод для дальнейшего изучения вопросов математического моделирования, прочности и устойчивости преднапряженных оснований и их совместной работы с сооружениями.

## **2. Понятие анализа и синтеза, как методов исследования**

Эмпирический уровень познания - это процесс мыслительной - языковой - переработки чувственных данных, вообще информации, полученной с помощью органов чувств. Такая переработка может состоять в анализе, классификации, обобщения материала, получаемого посредством наблюдения. Здесь образуются понятия, обобщающие наблюдаемые предметы и явления. Таким образом формируются эмпирический базис тех или иных теорий.

Для теоретического уровня познания характерно то, что "здесь включается деятельность мышления как другого источника знания: происходит построение теорий, объясняющих наблюдаемые явления, открывающих законы области действительности, которая является предметом изучения той или иной теории".



Общенаучными методами, применяемыми как на эмпирическом, так и на теоретическом уровнях познания являются такие методы как: анализ и синтез, аналогия и моделирование.

Анализ и синтез, подобно индукции и дедукции, представляют собой противоположные, но в то же время тесно связанные методы познания.

В простейшем своем виде анализ есть мысленное расчленение целого на части и отдельное познание этих частей как элементов сложного целого. Задача анализа - найти, увидеть в целом - части, в сложном - простое, в едином - многое, в следствии - причину и т.п.

Анализ - это прием мышления, связанный с разложением изучаемого объекта на составные части, стороны, тенденции развития и способы функционирования с целью их относительно самостоятельного изучения. В качестве таких частей могут быть какие-то вещественные элементы объекта или же его свойства, признаки.

Он занимает важное место в изучении объектов материального мира. Но он составляет лишь первоначальный этап процесса познания.

Метод анализа применяют для изучения составных частей предмета. Будучи необходимым приемом мышления, анализ является лишь одним из моментов процесса познания.

Средством анализа является манипулирование абстракциями в сознании, т.е. мышление.

Для постижения объекта как единого целого нельзя ограничиваться изучением лишь его составных частей. В процессе познания необходимо вскрывать объективно существующие связи между ними, рассматривать их в совокупности, в единстве.

Осуществить этот второй этап в процессе познания - перейти от изучения отдельных составных частей объекта к изучению его как единого связанного целого - возможно только в том случае, если метод анализа дополняется другим методом - синтезом.

В процессе синтеза производится соединение воедино составных частей (сторон, свойств, признаков и т.п.) изучаемого объекта, расчлененных в результате анализа. На этой основе происходит дальнейшее изучение объекта, но уже как единого целого.

Анализ фиксирует в основном то специфическое, что отличает части друг от друга. Синтез раскрывает место и роль каждого элемента в системе целого, устанавливает их взаимосвязь, то есть позволяет понять то общее, что связывает части воедино.

Анализ и синтез находятся в единстве. По своему существу они - "две стороны единого аналитико-синтетического метода познания". "Анализ, предусматривающий осуществление синтеза, имеет своим ядром выделение существенного".

Анализ и синтез берут свое начало в практической деятельности. Постоянно расчленяя в своей практической деятельности различные предметы на их составные части, человек постепенно научался разделять предметы и мысленно.

Практическая деятельность складывалась не только из расчленения предметов, но и из воссоединения частей в единое целое. На этой основе возникал и мыслительный процесс.

Анализ и синтез являются основными приемами мышления, имеющими свое объективное основание и в практике, и в логике вещей: процессы соединения и разъединения, создания и разрушения составляют основу всех процессов мира.

На эмпирическом уровне познания применяют прямой анализ и синтез, для первого поверхностного ознакомления с объектом исследования. Они обобщают наблюдаемые предметы и явления.

На теоретическом уровне познания применяют возвратный анализ и синтез, которые осуществляются путем многократного возврата от синтеза к повторному анализу.

Раскрывают наиболее глубокие, существенные стороны, связи, закономерности, присущие изучаемым объектам, явлениям.

Эти два взаимосвязанных приема исследования получают в каждой отрасли науки свою конкретизацию.

Из общего приема они могут превращаться в специальный метод, так существуют конкретные методы математического, химического и социального анализа. Аналитический метод получил свое развитие и в некоторых философских школах и направлениях. То же можно сказать и о синтезе.

Синтез являет собой противоположный процесс - соединение частей в целое, рассмотрение целого как сложного, состоящего из множества элементов. Восхождение от причины к следствию есть синтетический, конструктивный путь.

Поскольку изучаемое явление предстает всегда как сложное образование, его познание (после предварительного общего ознакомления) обычно начинается с анализа, а не с синтеза. Чтобы объединить части в целое, необходимо сначала иметь эти части перед собой. Поэтому анализ предшествует синтезу.

Логика выработала ряд правил аналитического исследования, к числу которых относятся следующие.

- 1. Перед анализом исследуемого предмета (явления) необходимо четко выделить его из другой системы, в которую он входит как составной элемент. Это тоже осуществляется с помощью анализа (предшествующего).
- 2. Далее устанавливается основание, по которому будет производиться анализ. Основанием называется тот признак анализируемого предмета, который отличает одни компоненты от других. На каждой ступени анализа должно выбираться одно основание расчленения, а не несколько сразу. Выделяемые в результате анализа элементы должны исключать друг друга, а не входить один в другой.
- 3. После этого осуществляется анализ, причем аналитические знания приобретаются в основном выводным путем, т.е. на основе действий, совершаемых по правилам формальной логики.

Синтез как способ построения невыводного знания заключается в объединении и переработке нескольких систем знаний, в объединении различных теоретических утверждений, в результате чего осуществляется межсистемный перенос знаний и рождается новое знание.

На основе синтеза в научном исследовании решаются следующие важные теоретические вопросы:

- 1. Изучаемый предмет представляется как система связей и взаимодействий с выделением наиболее существенных сторон и связей.
- 2. Выясняется, существует ли единая природа, общие существенные элементы у явлений, которые изучаются как различные, но у которых замечено нечто общее.
- 3. Устанавливается, существует ли связь между законами и зависимостями, относящимися к одному объекту.

Синтез, таким образом, не простое сложение частей, а логически - конструктивная операция, позволяющая намечать движение познания (выдвигать идеи, гипотезы, развивать их) и осуществлять его движение.

Результаты синтетической деятельности должна быть целостная картина, адекватно отражающая действительность.

Достоинство синтетического метода исследования - его соответствие, адекватность процессу движения, развития.

Процедуры системного анализа и синтеза в экономических исследованиях:

- 1. Выявление и формулирование научной проблемы. Определение объекта и предмета исследования, цели и задачи.
- 2. Целенаправленный сбор информации, структуризация проблем, описание исследуемой системы. Содержание: цели системы, степень зависимости от среды. Элементы системы. Структура. Связи и отношения. Поведение системы. Управление.
- 3. Построение гипотез о механизмах интеграции и путях развития. Построение модели (синтез).
- 4. Исследование объекта с помощью системы методов. Корректировка планов исследования.
- 5. Прогноз развития системы. Объяснения. Оформления.

### **3. Методические основы исследования напряженно-деформированного состояния сред с периодически повторяющейся структурой**

В основу предлагаемой двухуровневой модели поведения конструкций, выполненных из периодически повторяющихся кусочно-однородных материалов, положена возможность их рассмотрения с использованием двух различных масштабов детализации внутренней структуры [59-61]. На верхнем уровне (макроуровне) изучается напряженно-деформированное состояние исследуемой конструкции в целом. Материал конструкции представляется как континуальная, в общем случае реономная физически-нелинейная среда. Соотношения, устанавливающие на этом уровне связь между изменениями напряжений  $\Delta\sigma_{ij}$  и деформаций  $\Delta\epsilon_{ij}$  на элементарном шаге изменения

внешних воздействий для модели согласно [62, 67] представляются в виде уравнений упругости с дополнительными внутренними силами  $\Delta D_{ij} : ij \text{ kl} \Delta \sigma$   
 $ij = A_{ijkl} \Delta E - \Delta D$ , (4) где  $A_{ijkl}$  – упругие характеристики материала верхнего уровня,  $\Delta D_{ij}$  – дополнительные силы, обусловленные учетом эффектов нелинейного деформирования и разрушения материала. Величина конкретных значений дополнительных сил  $\Delta D_{ij}$  – содержащих нелинейность в соотношениях (4) определяется на нижнем уровне. Для этого исследуемая конструкция представляется в виде совокупности имеющих типовую структуру, повторяющихся блоков (рис. 2.1). В дискретной модели верхнего уровня каждому блоку соответствует конечный элемент (либо группа КЭ, объединенных в макроэлемент) (рис. 2.2). Для каждого блока изучается процесс его деформирования и разрушения с учетом реальной структуры основного материала и реальных свойств составляющих его элементарных фрагментов. В качестве внешних воздействий на каждом шагу 23 нагружения для блока выступают граничные перемещения или граничные силы (в зависимости от реализующего модель программного комплекса), полученные из решения на предыдущем этапе задачи верхнего уровня. Уравнения, устанавливающие связь между изменениями напряжений  $\Delta S_{ij} \text{ m}$  и деформаций  $\Delta e_{ij} \text{ m}$  на шаге нагружения для каждого из  $m$  материалов, составляющих блок, записываются в виде:  $m \text{ ij m kl m ijkl m ijkl} \Delta S = C \Delta e - \Delta d$ , (5) где  $C_{ijkl} \text{ m}$  – упругие характеристики материала для  $m$ -го элементарного фрагмента,  $d_{ij} \text{ m}$  – соответствующие дополнительные силы, обусловленные учетом эффектов нелинейного деформирования и разрушения материала. Рис. 2.1. Материал конструкции верхнего уровня с выделенным типовым фрагментом 24 Рис. 2.2. Типовой фрагмент с делением на составляющие. Необходимые для решения задачи на верхнем уровне значения дополнительных сил  $\Delta D_{ij}$  вычисляются для нескольких  $n$  фиксированных точек блока, соответствующих точкам интегрирования макроэлемента верхнего уровня, путем осреднения напряжений и деформаций по каждому из  $n$  объемов  $V_n$ , содержащих названные точки:  $\cdot / , / , n \text{ ijkl kl ij n ij n } V \text{ ij n ij n } V$

$$\int_V \sigma_{ij} n_j dV = \Delta \sigma_{ij} \int_V n_j dV = \Delta \sigma_{ij} V n_j \quad (6)$$
 Полученные на микроуровне дополнительные силы  $\Delta D_{ij}$  используются для уточнения решения задачи верхнего уровня в текущем приближении. Таким образом, решение полной задачи анализа поведения конструкции на каждом шаге нагружения для верхнего уровня сводится к последовательности решения ряда линейных задач верхнего уровня при решении совокупности нелинейных задач для каждого из блоков. Следует отметить, что полное решение задачи в рамках описанной выше схемы является достаточно трудоемким. В связи с этим в работе был разработан упрощенный вариант модели с двухуровневым представлением кусочно-однородного материала конструкции. Алгоритм его реализации состоит в следующем. При изучении НДС реальной конструкции ее материал рассматривается как однородная разномодульная, а в общем случае нелинейная среда верхнего уровня. Для получения характеристик деформирования и разрушения этого условного однородного материала, отражающего осредненные свойства реального кусочно-однородного материала, осуществляется переход к нижнему уровню модели. Для этого в составе исследуемого изделия выделяется наиболее типичный для материала данной конструкции фрагмент. Размер этого фрагмента выбирается из условия возможности учета реальной структуры изучаемого кусочно-однородного материала и реальных свойств всех его составляющих. Подробно методика выбора вида, размера и его конечно-элементного разбиения описаны в параграфе 2.4. С целью получения осредненных характеристик однородной среды верхнего уровня для выделенного фрагмента решается ряд краевых задач деформирования и разрушения для некоторых типовых схем нагружения. При решении этих задач учитываются первичные механические и прочностные характеристики составляющих фрагмент материалов. Необходимое количество вариантов нагружения определяется характером поведения исследуемого кусочно-однородного материала, таким как учет разномодульности или общей физической нелинейности. Из вектора решений этих задач путем осреднения по объему фрагмента определяются приведенные

материальные функции, необходимые для описания условной однородной среды. Подробно методика всех этих числовых исследований также описана в параграфе 2.3. После определения на нижнем уровне модели значений осредненных характеристик однородного материала осуществляется переход на ее верхний уровень, где решается краевая задача для всей конструкции под действием внешних нагрузок, соответствующих реальным условиям. Решение задач на обоих уровнях: на верхнем – для всей конструкции и на нижнем – для типового фрагмента, сводится к выполнению описанного в третьем параграфе этой главы алгоритма решения краевой задачи для конструкции на этапе нагружения. Но для верхнего уровня краевая задача решается для условного материала под действием реальных нагрузок, а для нижнего – для реальных материалов, нагруженных по заранее определенной схеме, определяемой характером изучаемого кусочно-однородного материала. Получаемый по такой схеме исследования качественный характер развития поврежденности конструкции на верхнем уровне носит приближенный характер, так как не учитывается специфика разрушения каждой компоненты. 26 Если задача требует представить разрушение материалов в отдельных локальных зонах, то предусматривается возможность использования расширенного алгоритма реализации двухуровневой модели. В этом случае после решения задачи на верхнем уровне предусмотрен возврат на нижний уровень, где подробно изучается процесс деформирования и разрушения одного или нескольких наиболее нагруженных фрагментов, которые по своим размерам и конфигурации могут не соответствовать типовым. Наиболее нагруженным считается блок, который включает в себя участок наибольшим для конструкции уровнем меры повреждений. В качестве граничных условий для фрагментов, как и в первоначальной схеме модели двухуровневого материала, выступает вектор граничных перемещений, полученный из решения задачи верхнего уровня, а материал самих фрагментов соответствует исходному кусочно-однородному материалу. Описанные варианты реализации двухуровневой модели кусочно-однородного материала использовались при



расчетах реальных конструкций кирпичной кладки. Были получены хорошо согласуемые с экспериментом результаты, которые приводятся в главе 3. 2. 2. Модель материала, характеристики которого зависят от вида НДС, физической нелинейности, текущего уровня поврежденности и ползучести. Для учета реальных свойств материалов, составляющих каменные кладки, необходимо использовать модели, описывающие физическую нелинейность упругих свойств материала, зависимость упругих и прочностных характеристик от текущего уровня поврежденности, натекающей ползучести и вида НДС. В связи с этим в настоящей работе поведение материалов каменных кладок рассматривается на основе соотношений механики поврежденной среды, реализованных в рамках составной модели поврежденного материала [62, 67, 71], первоначально предназначенной для моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций, выполненных из традиционных материалов. В рамках предложенной модели разномодульный материал рассматривается как котикулярная упругая физически нелинейная среда, свойства которой зависят от текущего вида НДС и текущего уровня поврежденности материала. Применительно к изучению каменных кладок принимается, что развитие повреждений в материале вызывается эффектами хрупкого разрушения и может быть описано как некоторый квазистационарный процесс, сопровождающийся необратимой деградацией упругих свойств. Учет влияния поврежденности на процесс деформирования осуществляется с помощью скалярной функции  $\omega$  [1, 62, 67], представляющей собой меру уменьшения эффективных площадок действия напряжений по отношению к их начальному неповрежденному значению путем введения зависимости упругих характеристик материала от текущего значения этой функции. Также принимается, что кривые необратимого деформирования материала при лучевых процессах нагружения, соответствующих различным значениям параметра вида НДС, подобны друг другу. В качестве параметра, определяющего вид НДС, используется величина  $P$ , зависящая от соотношения первых двух инвариантов тензора напряжений и

определяемая через главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  в точке тела с помощью зависимости [62]:

$$P = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \quad (7)$$

Величина  $P$  монотонно меняется от значения  $P = -1$  при всестороннем сжатии до  $P = +1$  при всестороннем растяжении. При чистом сдвиге  $P = 0$ , при одностороннем растяжении  $P = 1/3$ . В пределах 1-й стадии деформирования для неповрежденного материала при  $\omega = 0$  уравнения, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями, в физически нелинейном разномодульном материале могут быть записаны в виде:

$$\sigma_{ij} = 2G(e, T) \epsilon'_{ij} + \delta_{ij} - \alpha \quad (8)$$

где  $G, K$  – текущие значения модулей сдвиговой и объемной деформации, зависящие от уровня температуры  $T$  и текущего значения параметра  $P$ ;  $\epsilon'_{ij}$  и  $\epsilon$  – девиаторная и шаровая составляющие тензора деформаций,  $\alpha = \alpha(T)$  – коэффициент температурного расширения. Зависимость модуля объемной деформации  $K$  от параметра вида НДС принимается в виде:

$$K(P) = K_0 + A_1 P \quad (9)$$

где  $K_0$  – значение модуля объемной деформации при значении  $P = 0$ ,  $A_1 P$  – функция вида НДС.

Текущее значение модуля сдвига принимается в виде:

$$G(P) = G_0' + f_2 P \quad (10)$$

где  $G_0'$  – модуль сдвига материала при  $P = 0$ , зависящий в свою очередь от уровня напряженно деформированного состояния в точке тела,  $f_2 P$  – функция вида НДС. При использовании теории физически нелинейного упругого тела или теории пластичности деформационного типа модуль  $G_0'$  представляет собой секущий модуль сдвига на диаграмме  $\sigma \sim \epsilon$  (интенсивность напряжений  $\sim$  интенсивность деформаций). При этом величину  $G_0'$  можно получить из соотношения:

$$G_0' = \frac{1}{3} \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad (11)$$

где  $G_0$  – модуль сдвига материала в области упругого деформирования при  $P = 0$ ,  $\frac{1}{3} \frac{d\sigma}{d\epsilon}$  – функция пластичности, которая в случае применения деформационной теории пластичности может быть принята в виде:

$$G_0' = G_0 + A_2 P \quad (12)$$

В результате текущее значение модуля сдвига можно представить в виде:

$$G(P) = G_0 + A_2 P + f_2 P \quad (13)$$

где  $A_2 P$  – функция пластичности, которая в случае применения деформационной теории пластичности может быть принята в виде:

$$G(P) = G_0 + A_2 P + f_2 P + f_3 P^2 \quad (14)$$

В случае учета температурных воздействий модули  $K_0$  и  $G_0$  будут зависеть от уровня действующей температуры. Применительно к материалам

каменной кладки зависимость упругих характеристик деформирования от параметра вида НДС можно представить в виде [48]:  $\sigma_{ij} = K \cdot P + K_0 + g_1 \cdot \text{sign } P \cdot |P|^{1/3} + g_2 \cdot P^2 + g_3 \cdot P^3$ , (16) В приведенных выражениях  $K_0$ ,  $g_1$  – функции материала, вычисляемые по значениям модулей объемной деформации при одноосном растяжении  $K^+$  и сжатии  $K^-$ :  $K_0 = \frac{2}{3} K^+ + \frac{1}{3} K^-$ , (17)  $g_1 = \frac{2}{3} K^+ - \frac{1}{3} K^-$ , (18)  $G_0$  – модуль сдвига при значении  $P=0$  (чистый сдвиг),  $g_2$ ,  $g_3$  – функции материала, определяемые по значениям модулей сдвига при одноосном растяжении  $G^+$  и сжатии  $G^-$ :  $G_0 = \frac{1}{2} G^+ + \frac{1}{2} G^-$ ,  $g_2 = \frac{1}{2} G^+ - \frac{1}{2} G^-$ ,  $g_3 = \frac{1}{2} G^+ + \frac{1}{2} G^-$  (19) Для учета влияния поврежденности на текущий процесс деформирования материала вводится зависимость характеристик деформирования от меры поврежденности, характеризуемой скалярной функцией  $\omega$  [1, 62, 67], представляющей собой меру уменьшения эффективных площадок действия напряжений по отношению к их начальному неповрежденному значению. При формулировке соотношений, устанавливающих связь между напряжениями и деформациями для поврежденного материала, в рассмотрение вводятся две характеристики напряжений: эффективные  $\sigma_{ij}$ , действующие на поврежденных площадках, и приведенные  $\sigma_{ij}^*$ , статически эквивалентные первым, но отнесенные к неповрежденным площадкам. Первые используются в моделях, определяющих состояние материала в точке тела, вторые – на уровне описания конструкции при формулировке уравнений равновесия и статических граничных условий. Для эффективных напряжений связь с деформациями остается такой же, как в (8). При формулировке аналогичных соотношений для приведенных напряжений учитывается зависимость упругих характеристик материала от текущего уровня поврежденности:  $\sigma_{ij}^* = G \cdot e_{ij}' + \delta_{ij} K \cdot e - \alpha T$ , (20) где  $1(\cdot) \cdot G = G - \omega$ , (21)  $1(\cdot) \cdot K = K - \omega$ , (22)  $\omega$  – текущее значение меры поврежденности. 30 Как указывалось выше, при описании процесса разрушения материалов каменной кладки рассматриваются лишь повреждения, обусловленные эффектами хрупкого разрушения. Для описания развития таких повреждений используются

кинетические уравнениями для изменения меры поврежденности  $\Delta\omega$  [62, 67] в виде:  $\Delta\omega = 0$  при  $R S \sigma_1 < \sigma$ ,  $\sigma_3 > \sigma$  или (23)  $\Delta\omega = S \sigma_3 < \sigma$ , где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  – текущие значения первого и третьего главных напряжений (эффективных напряжений),  $R S \sigma$ ,  $\sigma$  – разрушающие значения главных напряжений при растяжении и сжатии, величина которых зависит от температуры и вида НДС,  $\omega$  – накопленное значение меры поврежденности,  $S$  – константа, используемая для регуляции процесса развития повреждений, определяемая в процессе реализации схемы релаксации состояния [69, 71]. Использование этой схемы позволяет представить развитие эффектов хрупкого разрушения, которое является динамически процессом, как некоторый квазистационарный процесс. Связь между напряжениями и деформациями в точке разномодульного материала, описанная приведенными выше соотношениями, существенно нелинейна. Эта нелинейность обусловлена зависимостью деформационных характеристик материала от уровня деформаций, текущей меры поврежденности и текущего значения параметра  $P$  вида НДС величина которого заранее неизвестна и может быть определена лишь в результате решения соответствующей краевой задачи. Поэтому для анализа процесса деформирования материала в рамках приведенных соотношений необходимо последовательно проследивать процесс изменения всех определяющих параметров от начального ненагруженного состояния в процессе изменения внешних воздействий. С этой целью весь процесс нагружения исследуемой конструкции приходится разбивать на ряд достаточно малых шагов (этапов нагружения) и формулировать краевую задачу для текущего шага нагружения. Для установления соотношений, устанавливающих связь между изменениями напряжений  $\Delta\sigma_{ij}$ ,  $\Delta\epsilon_{ij}$  и деформаций  $\epsilon_{ij}$  в точке разномодульного материала на шаге  $31$  нагружения, рассмотрим два достаточно близких состояния: исходное, характеризуемое уровнем действующей температуры  $T$ , напряжений  $\sigma_{ij}$ , деформаций  $\epsilon_{ij}$  и мерой поврежденности  $\omega$  в начале текущего шага, и текущее состояние, характеризуемое значением аналогичных величин

$T^{\wedge}, \sigma_{ij}^{\wedge}, ij e^{\wedge}$  и  $\omega^{\wedge}$  в конце шага. Изменение эффективных напряжений на шаге нагружения можно представить в виде:  $\Delta \sigma_{ij} = \sigma^{\wedge}_{ij} - \sigma_{ij} = \Delta \sigma'_{ij} + \delta_{ij} \Delta \sigma$ . Соответствующие изменения шаровой  $\Delta \sigma$  и девиаторных  $\sigma'_{ij} \Delta'$  составляющих напряжений на шаге можно получить из следующих соотношений. Изменение шаровой составляющей:  $\sigma \Delta \Delta \sigma = \sigma - \sigma = + \alpha - + \alpha = \Delta - \Delta \alpha + K K K e T K e T K (e (T))^{\wedge} 3 ( ) 3^{\wedge} ( \wedge \wedge \wedge 3$ , (24) где  $\Delta e = e^{\wedge} - e$ ;  $\Delta ( ; \alpha T) = \alpha^{\wedge} T^{\wedge} - \alpha T \Delta K = K^{\wedge} - K$ . Изменения девиаторных составляющих:  $ij ij ij ij ij ij ij G G G e G e G e \sigma' \Delta \Delta \sigma' = \sigma' - \sigma' = ' - ' = \Delta' + \wedge^2 2 \wedge^2 2$ , (25) где  $ij ij ij \Delta e' = e'^{\wedge} - e'$ ,  $\Delta G = G^{\wedge} - G$ . В результате связь между изменениями эффективных напряжений и деформаций на шаге нагружения может быть представлена в виде:  $\square \square \square \square \square \square \Delta' + \Delta - \Delta + \Delta \Delta \sigma = \cdot \Delta' + \sigma \delta \alpha \sigma K K K e T G G G e ij ij ij ij 3 ( ( ) )^2$ . (26) Аналогичные уравнения можно получить для приведенных напряжений  $\Delta \sigma_{ij}$ . 3.2 Изменение шаровой составляющей:  $\sigma \Delta \Delta \sigma = \sigma - \sigma = \Delta - \Delta \alpha + K K K K e T * * * * ( ( ) )^3$ , (27) где  $1( \wedge )^{\wedge} * K = K - \omega$ ;  $\Delta \omega = \omega^{\wedge} - \omega$ ;  $-\omega - \Delta \omega \Delta = -\omega - - \omega = \Delta 1( \wedge ) 1( \wedge ) 1( )^{\wedge} * K K K K K K K$ . Изменения девиаторных составляющих:  $ij ij ij ij ij ij G G G e \sigma' \Delta \Delta \sigma' = \sigma' - \sigma' = \Delta' + * * * * \wedge^2$ , (28) где  $1( \wedge )$ ,  $G^{\wedge} * = G^{\wedge} - \omega - \omega - \Delta \omega \Delta = \Delta 1( \wedge ) * G G G G$ . Иначе говоря:  $[ ] \sigma \Delta \sigma + \delta \Delta - \Delta \alpha + \Delta \Delta \sigma = \Delta' + K K K e T G G G e ij ij ij ij * * * * 3 ( ( ) )^2$ . (29) Уравнения для эффективных напряжений (26), так же как и для приведенных напряжений (29) являются существенно нелинейными, так как входящие в них члены зависят от текущих значений параметра  $P^{\wedge}$  и меры поврежденности  $\omega^{\wedge}$ . Для линеаризации задачи на основе полученных уравнений могут быть использованы различные подходы и в зависимости от выбранного подхода возможно дальнейшее преобразование уравнения (29). В случае использования для линеаризации задачи наиболее предпочтительного в вычислительном отношении метода начальных напряжений целесообразно собрать все нелинейные члены уравнения (29) в виде некоторого “дополнительного” напряжения  $ij \Delta d$  и выделить часть  $0 \Delta \sigma_{ij}$ , связанную с изменением деформации соотношениями упругости для одномодульного материала при  $P=0$ :  $\Delta \sigma_{ij} = \Delta \sigma_{ij} + \Delta d_{ij} * 0$ , (30)  $G e K e \Delta \sigma_{ij} = 0 \Delta ij' + \delta ij 0 \Delta 0^{\wedge}$

$3 \cdot 2$ , (31)  $t_{ij} \Delta d_{ij} = \Delta d_{ij} + \Delta d_{ij} + \Delta d_0$ , (32) где  $0 \Delta d_{ij}$  – часть  $ij \Delta d$ , обусловленная изменением температуры на шаге нагружения (может быть вычислена в начале шага).  $\sigma - \Delta \alpha \sigma' + \delta - \Delta \alpha + \delta - \Delta + \sigma' + - \Delta = - \Delta' + K K T A A A K K K K e A A A G G d G G e ij ij ij r ij$  (34)  $t \Delta d_{ij}$  – часть  $ij \Delta d$ , обусловленная влиянием накопленной поврежденности:  $\Delta = -(\Delta \sigma \omega + \sigma \cdot \Delta \omega) ij ij t dij$ . (35) В приведенных соотношениях предполагалось, что нелинейное поведение неповрежденной каменной кладки может быть описано на основе модели физически нелинейного материала, которая не учитывает возможность появления в материале необратимых деформаций, обусловленных эффектами пластичности или развивающихся во времени деформаций ползучести. Для учета перечисленных эффектов достаточно ввести в уравнения (26), (29) и (34) слагаемые, зависящие от изменения необратимых деформаций  $n_{ij} \Delta e$ :  $\sigma \Delta \sigma' + \delta \Delta - \Delta \alpha + \Delta \Delta \sigma = \Delta' - \Delta + K K K e T G G G e e ij ij n ij ij ij ( ) 3 ( ( ) )^2$ , (36)  $[ ] \sigma \Delta \sigma + \delta \Delta - \Delta \alpha + \Delta \Delta \sigma = \Delta' - \Delta + K K K e T G G G e e ij ij n ij ij ij * * * * ( ) 3 ( ( ) )^2$ , (37)  $\sigma - - \Delta \alpha + - + \delta - \Delta + \sigma' - \Delta + + - \Delta = - \Delta' + ) ( ) ^ ( 3 1 ( ) ) ^ ( ^ ) ^ ( 3 ^ 2 1 ( ) ^ ( ^ ) ^ ( 2 0 1 1 1 0 0 0 2 2 2 0 0 0 K K T A A A K K K K e G e A A A G G d G G e ij n ij ij r ij$  (38)  $s_{ij} p_{ij} n_{ij} \Delta e = \Delta e + \Delta e$ , (39) где  $s_{ij} p_{ij} \Delta e$ ,  $\Delta e$  – изменения деформаций пластичности и ползучести на шаге нагружения. 34 Для изделий каменной кладки наиболее актуальным является учет деформаций ползучести, поэтому можно принять:  $s_{ij} n_{ij} \Delta e = \Delta e$ . В качестве модели, описывающей процессы ползучести каменной кладки, можно использовать соотношения [62], предложенные для описания ползучести традиционных материалов, дополненные зависимостью основных параметров этой модели от текущего вида НДС. При формулировке этой модели принимаются гипотезы о подобии кривых ползучести,

построенных при различных значениях параметра вида НДС и различных уровнях действующих напряжений, а также гипотеза существования начальной поверхности ползучести. Согласно этой модели скорость ползучести разномодульного материала с  $\dot{\epsilon}_{ij}$  может быть представлена в виде:  $\dot{\epsilon}_{ij} = L(\psi, T, P) H(\tau, T) \sigma'_{ij} = \sigma'_{ij} \Psi \cdot \tau$ , (40) где  $\sigma'_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений,  $L(\psi, T, P)$  – функция, характеризующая начальную скорость ползучести, отнесенную к единичному напряжению,  $H(\tau, T)$  – функция, характеризующая изменение начальной скорости от параметра упрочнения  $\tau$ ,  $\Psi$  – функция, характеризующая уровень действующих напряжений и определяемая выражением:  $\Psi = \frac{1}{C} \left( \frac{\sigma'}{\sigma_0} \right)^n$ . (41) В качестве параметра упрочнения  $\tau$  может приниматься либо длина траектории деформаций ползучести [62]:  $\tau = \int_0^t \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dt$ , (42) либо энергия диссипации:  $\tau = \int_0^t \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dt$ . (43) В более простом варианте можно принять, что  $\tau$  равно времени ползучести. В модели также принимается, что зависимости фигурирующего в уравнении (41) радиуса поверхности ползучести  $C$  и функции  $L$  от текущего значения параметра  $P$  могут быть представлены в виде:  $C = C_0 \exp(-gP)$ ,  $L = L_0 \exp(-gP)$ , (44) (45) где  $C_0$ ,  $L_0$ ,  $g$  – значения функций при значении  $P=0$ . Для определения материальных функций модели  $C$ ,  $L$ ,  $H$ ,  $g$  и  $g$  с необходимо иметь набор кривых ползучести  $\dot{\epsilon}_{ij}(t)$  для ряда значений напряжений  $\sigma_i$  ( $i = 3$  – при фиксированных значениях  $P$  ( $j = 1-3$ )). На основе предложенной структуры определяющих уравнений решение нелинейной краевой задачи на шаге нагружения для разномодульного материала может быть сведено к последовательности линейных краевых задач для одномодульного материала, упругие характеристики которого соответствуют параметру вида НДС  $P=0$  с дополнительными объемными силами, обусловленными “дополнительными” напряжениями  $\Delta \sigma_{ij}$ , величина которых уточняется в процессе последовательных приближений. Реализация рассмотренных выше физических соотношений, описывающих поведение разномодульного

материала, требует знания начального состояния материала в точке тела, характеризуемого уровнем действующих напряжений, поврежденности и температуры, а также пространственно-временные законы изменения внешних воздействий (объемных, поверхностных сил, граничных смещений и температурных полей) и их распределения по шагам нагружения. Кроме этого должны быть известны материальные функции  $\sigma(\epsilon)$ ,  $\sigma(\epsilon, T)$ ,  $(g_1, T, g_2, T, g_3, T)$ , определяющие разномодульные свойства материала, функция  $\sigma(\epsilon, 0, u, G', T, e)$ , определяющая нелинейную упругость, а также функции, необходимые для описания процесса разрушения материала. При этом на основе предложенной структуры определяющих уравнений решение нелинейной краевой задачи на шаге нагружения для разномодульного материала может быть сведено к последовательности линейных краевых задач для одномодульного материала упругие характеристики которого соответствуют параметру вида НДС  $P=0$  с дополнительными объемными силами, обусловленными “дополнительными” напряжениями  $\sigma_{ij}^d$ . При фиксированных значениях этих величин уравнения (30)–(32) можно рассматривать как уравнения линейной упругости изотропного материала с некоторой заданной системой начальных напряжений. Такая трактовка указанных уравнений позволяет представить решение нелинейной краевой задачи анализа конструкций, выполненных из изотропных разномодульных материалов в виде последовательности линейных задач для материалов с фиксированными модулями  $E_0, K$  и дополнительными объемными и поверхностными силами, обусловленными членами  $\sigma_{ij}^d$ , величина которых уточняется в процессе последовательных приближений. При этом на первом этапе нагружения может быть использовано начальное приближение, соответствующее условию  $\Delta = \Delta = 0$   $\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij}^d$ , а на всех последующих этапах начальное приближение строится на основе значений, вычисленных на предыдущих этапах.

## 2. 3. Методические основы численного моделирования поведения изделий каменной кладки при квазистатических нагружениях

Исследование процессов деформирования и разрушения изделий каменной кладки в условиях квазистатических



нагружений на основе рассмотренных выше физических соотношений приводит к сложным нелинейным системам разрешающих уравнений. В настоящее время решение таких нелинейных задач строится обычно на основе инкрементальной формулировки исходных уравнений и применения современных шаговых методов. В данной работе формулировка разрешающих уравнений, описывающих процессы деформирования и разрушения изделий каменной кладки, и методика их численного решения строится по аналогии с методическими положениями, предложенными для численного моделирования нелинейного поведения конструкций, выполненных из традиционных материалов при квазистатических нагружениях на основе МКЭ [62, 67, 70, 71]. Пусть в пространстве координат  $i, x$  рассматривается тело или совокупность тел, выполненных из одного или нескольких в общем случае разномодульных материалов, занимающих объем  $V$  и ограниченное поверхностью  $\Sigma$ . Тело находится под действием объемных сил  $F_i$ , температуры  $T$ , распределенных по заданному закону по объему  $V$ , а также поверхностных сил  $P_i$  и граничных перемещений  $G_{ij}$  распределенных по частям поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  соответственно. Каждое из перечисленных воздействий статически меняется по заданному закону во времени  $t$ , которое рассматривается в дальнейшем как параметр нагружения. В начальный момент времени  $t=t_0$  состояние тела характеризуется полем начальных напряжений  $(\sigma_{ij})_0$ , а также параметров, характеризующих накопленную поврежденность материала. Для характеристики деформируемой системы в процессе пошагового решения задачи используются три состояния с соответствующими моментами времени  $t$  и величинами, определяющими состояние конструкции на данный момент времени, а также заданным уровнем внешних воздействий конструкции. Начальное ( $t=t_0$ ;  $F_i, P_i, T, \sigma_{ij}, \omega$ ), а также два близких состояния: исходное ( $t$ ;  $\sigma_{ij}, \omega$ ) и текущее ( $t+\Delta t$ ;  $\sigma_{ij}, \omega$ ). В соответствии с известными положениями механики деформируемого твердого тела в случае малых

перемещений, деформаций и углов поворота поля перемещений  $(\epsilon_{ij})$   $(\epsilon_{ij} = u_{i,j} - u_{j,i})$ , деформаций  $(\epsilon_{ij})$   $(\epsilon_{ij} = e_{ij} - e_{ji})$  и напряжений  $(\sigma_{ij})$   $(\sigma_{ij} = \sigma_{ji})$  для каждого из рассмотренных моментов нагружения тела, находящегося в равновесном состоянии, должны удовлетворять системе, состоящей из: геометрических уравнений:  $(\epsilon_{ij})$   $(\epsilon_{ij} = u_{i,j} - u_{j,i})$ ; (46) уравнений равновесия в объеме  $V$ :  $\sigma_{ij,j} + F_i = 0$ ; (47) физических уравнений, определенных соотношениями (29) – (35). А также удовлетворять граничным условиям на частях поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Для инкрементальной формулировки необходимо записать приведенные соотношения для изменения всех величин на шаге изменения внешних сил. Изменения компонент деформаций  $\Delta \epsilon_{ij}$  на шаге нагружения можно получить как разность полных деформаций, записанных на основе соотношения (46) для текущего и исходного состояний соответственно:  $(\epsilon_{ij})$   $(\epsilon_{ij} = u_{i,j} - u_{j,i})$ ,  $\Delta \epsilon_{ij} = \Delta u_{i,j} - \Delta u_{j,i}$ . (48) Аналогичным образом можно получить уравнения равновесия, которым должны удовлетворять изменения напряжений в объеме тела и на её граничных 38 поверхностях  $\Sigma_1$  при условии, что  $j_n$  – направляющие косинусы нормали к поверхности  $\Sigma_1$  в рассматриваемой точке:  $\Delta \sigma_{ij,j} + \Delta F_i = 0$  в  $V$ ;  $\Delta \sigma_{ij,j} + \Delta F_i = 0$  на  $\Sigma_1$ , (49) (50) а также кинематические граничные условия для изменений перемещений, заданных на частях поверхности  $\Sigma_2$ :  $\Delta u_i = u_i - u_i$ . (51) Совокупность уравнений (29, 39–42) позволяет определить изменение перемещений, деформаций и напряжений в точках исследуемого объекта на текущем шаге изменения внешних воздействий. При фиксированных значениях входящих в (32) параметров  $\Delta d_{ij}$  разрешающая система уравнений для сформулированной задачи может быть получена на основе принципа возможной работы, сформулированного для рассматриваемой деформируемой системы в текущем состоянии:  $\int_V (\Delta \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}) dV + \int_{\Sigma_1} (\Delta \sigma_{ij} - \sigma_{ij}) n_j dS + \int_{\Sigma_2} (\Delta u_i - u_i) P_i dS = 0$ . (52) Представляя в (52) изменения приведенных напряжений  $\Delta \sigma_{ij}$  согласно формуле (30) и учитывая, что в исходном состоянии деформируемая система находится в равновесии, можно преобразовать (52) к виду:  $(\epsilon_{ij})$   $(\epsilon_{ij} = u_{i,j} - u_{j,i})$ ,  $\Delta \epsilon_{ij} = \Delta u_{i,j} - \Delta u_{j,i}$ . (53) Уравнение (53)

представляет собой вариационное уравнение, описывающее равновесие деформируемой системы на текущем шаге нагружения. В этом уравнении изменения деформаций  $\Delta \epsilon_{ij}$  связаны с изменениями перемещений  $\Delta u_i$  соотношениями (48);  $\Delta F_i$ ,  $\Delta P_i$ ,  $\Delta d$  – изменения объемных, поверхностных и дополнительных сил в объеме конструкции  $V$  и на частях поверхности  $\Sigma_1$ ;  $\Delta \sigma_{ij}$  – изменения напряжений, соответствующие условному упругому, изотропному, одномодульному материалу (29). Изменения перемещений  $\Delta u_i$  в (53) удовлетворяют кинематическим условиям (51) на части поверхности  $\Sigma_2$ . Полученное уравнение можно представить в виде следующего операторного уравнения:  $\Phi = HU + R = 0$ , (54) где  $H(t)$  – линейный оператор,  $U$  – изменения перемещений точек системы для текущего шага нагружения,  $R$  – вектор нагрузки, включающий в себя постоянную  $R_0$  и переменную  $r$  составляющие:  $R = R_0 + r$ . (55) Постоянная составляющая вектора  $R_0$  определяется совокупностью внешних воздействий на конструкцию в виде изменений на шаге нагружения объемных и поверхностных сил, температуры, граничных перемещений, а также величинами  $\Delta d_{ij}$  (часть  $\Delta d_{ij}$ , обусловленная изменением температуры на шаге нагружения), которые могут быть вычислена в начале шага. Переменная часть вектора  $r = r(U, t)$  включает в себя нелинейные члены, зависящие от решения задачи, и определяется текущими значениями величин  $r \Delta d_{ij}$  и  $t \Delta d_{ij}$ . При этом решение задачи (54) можно представить в виде:  $U = U_0 + u$ , (56) где  $U_0 = H^{-1}R_0$  – соответствует решению задачи (54) в линейном приближении,  $u$  – нелинейная часть вектора решения, зависящая от вектора  $r$ . Определение нелинейной составляющей вектора решения (вектора  $u$ ) осуществляется в рамках метода начальных напряжений, позволяющего свести решение нелинейной задачи  $u + H^{-1}r = 0$  к последовательности линейных задач с уточняемыми в процессе последовательных приближений значений вектора  $r$ . Численное решение линеаризованных задач осуществляется на основе МКЭ с использованием семейства изопараметрических конечных элементов с квадратичной сирендиповой аппроксимацией поля перемещений [67]. В дискретной

формулировке задачи на основе МКЭ операторному уравнению (54) соответствует система алгебраических уравнений, в которой роль оператора  $H$  играет матрица жесткости конструкции  $[H]$ , а роль векторов  $U$  и  $R$  – векторы узловых перемещений  $\{U\}$  и узловых сил  $\{R\}$  дискретной модели конструкции:  $[H]\{U\} - \{R\} = 0$ . (57) Таким образом, исследование поведения конструкций каменной кладки в рамках предлагаемой методики осуществляется путем последовательного интегрирования представленных выше разрешающих уравнений для последовательности меняющихся уровней внешних воздействий с учетом истории протекания процессов деформирования и разрушения материала в отдельных точках изделия. С этой целью реальная траектория нагружения представляется в виде кусочногладкой кривой в пространстве параметров нагружения и аппроксимируется совокупностью прямолинейных участков, величина которых определяется только условиями удовлетворительной аппроксимации реальных траекторий нагружения. Решение нелинейных задач на шагах (этапах) нагружения осуществляется в форме метода начальных напряжений путем итерационного уточнения равновесного состояния для текущей деформированной конфигурации конструкции. Перед решением задачи на каждом этапе производится формирование полей, характеризующих нагружение конструкций на текущем этапе (полей внешних воздействий и времени, соответствующих началу и концу текущего этапа нагружения). Дальнейший алгоритм решения краевой задачи МКЭ для исследуемой конструкции на шаге нагружения сводится к выполнению последовательности следующих вычислительных операций [62, 67]: 1. Вычисление матриц жесткости и векторов узловых сил, обусловленных изменением внешних воздействий для конечных элементов, входящих в состав исследуемой конструкции. 2. Построение матрицы  $[H]$  и вектора узловых сил  $\{R\}$  результирующей системы. Все эти вычисления, так же как и последующее обращение матрицы  $[H]$ , производится лишь для тех этапов, на которых меняются жесткостные характеристики конструкции. 3. Вычисление вектора узловых сил

конструкции  $\{r\}$ , обусловленных изменением упругих характеристик материала при изменении параметра вида НДС, изменением необратимых деформаций и поврежденности (определяемых текущими 41 значениями величин  $r \Delta d_{ij}$  и  $t \Delta d_{ij}$ ). Вычисления производятся лишь для тех КЭ, в которых названные величины изменились по сравнению с их значениями на предыдущей итерации.

4. Решение системы алгебраических уравнений для текущего вектора узловых сил ( $[H]\{U_0\} - \{R_0\} = 0$  на первой итерации и  $[H]\{u\} - \{r\} = 0$  – на последующих) с учетом результатов обращения матрицы  $[H]$  на первой итерации.

5. Проведение анализа поведения решения в процессе последовательных приближений на основе полученных в текущих приближениях значений векторов узловых перемещений  $\{u\}$  (проверка условий монотонности изменения компонент решения  $u_i$ , оценка изменения длины вектора  $L = \sqrt{\{u\}}$  в процессе приближений). Экстраполяция решения согласно схеме промежуточных экстраполяций при выполнении необходимых условий монотонности процесса приближений [59].

6. Вычисление в физических узлах конструкции величины изменения деформаций  $j_i \Delta \epsilon$  для текущего значения вектора узловых перемещений  $\{U\} = \{U_0\} + \{u\}$ .

7. Вычисление в физических узлах конструкции величин, характеризующих изменение упругих характеристик материала при изменении параметра вида НДС, изменение необратимых деформаций, меры поврежденности и параметров, характеризующих текущую историю необратимого деформирования; вычисление текущих значений величин  $r \Delta d_{ij}$  и  $t \Delta d_{ij}$  согласно (35) и (38)).

8. Проверка условий окончания процесса последовательных приближений на основе используемого критерия сходимости и при их нарушении – повторение всех операций, начиная с пункта 3.

9. Уточнение полей, характеризующих НДС в каждом физическом узле конструкции, определяющих начальное состояние для следующего шага нагружения. Исследование двухуровневой среды для каждого уровня также сводится к выполнению описанной выше последовательности типовых операций без различия, на каком уровне решается задача: на верхнем – для

однородной среды с осредненными характеристиками или на нижнем – для каждого типового фрагмента.

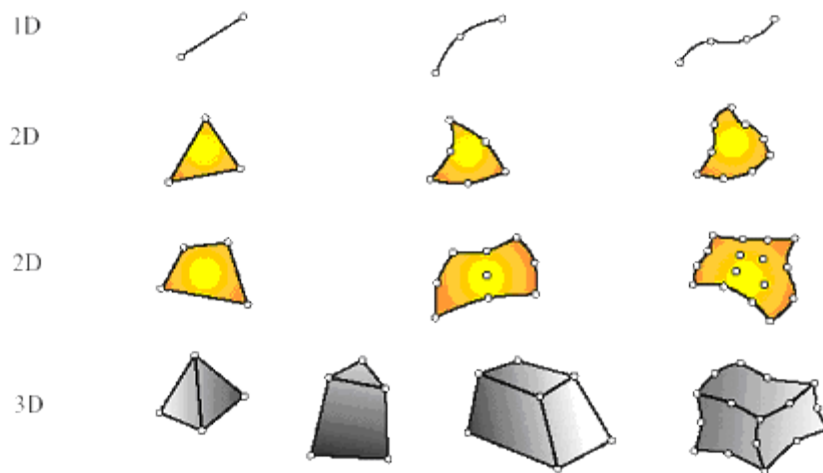
#### **4. Понятие о конечных элементах**

Как было отмечено, метод конечных элементов представляет собой наиболее распространенный приближенный метод в механике твердого тела и может быть интерпретирован с физической или математической точки зрения.

Основа физической концепции МКЭ – это разбиение математической модели конструкции на непересекающиеся компоненты (подобласти) простой геометрии, называемые *конечными элементами* или просто *элементами* для краткости. Множество элементов, на которые разбита конструкция, называется *конечно-элементной сеткой*. Механическое поведение каждого элемента выражается с помощью конечного числа степеней свободы или значений искомых функций во множестве узловых точек. Поведение математической модели, таким образом, аппроксимируется поведением дискретной модели, полученной путем сборки или ансамблирования всех элементов. Заметим, что концепция разбиения-сборки естественно возникает при исследовании многих искусственных или живых систем. Например, легко представить мост, здание, двигатель или скелет, как сложную систему, составленную из простых компонентов. Заметим также, что в отличие от метода конечных разностей, конечные элементы не накладываются друг на друга в пространстве.

##### **9.5.1. Атрибуты элемента**

Рассмотрим основные типы конечных элементов и их *свойства*, называемые *атрибутами* элементов (Рис. 9.14).



**Рис. 9.14.** Основные типы конечных элементов для одно-, дву- и трехмерных задач механики.

**Собственная размерность.** Конечные элементы могут описываться одной, двумя или тремя пространственными координатами в зависимости от размерности задачи, для решения которой они предназначены. Соответствующее число внутренних или локальных координат называется собственной размерностью элемента. В динамическом анализе время рассматривается как дополнительная размерность. Отметим, что в расчетах используются также специальные элементы с нулевой размерностью, такие как, точечные массы или сосредоточенные упругие элементы (пружины).

**Узловые точки.** Каждый элемент описывается множеством характерных точек, называемых узловыми точками или узлами для краткости. Узлы предназначены для описания геометрии элемента и для задания физических степеней свободы (числа неизвестных функций). Узлы обычно находятся в угловых или крайних точках элемента, но могут быть также расположены между угловыми узлами и внутри элемента. Данное различие связано с порядком аппроксимации, который обеспечивает данный конечный элемент. Элементы, имеющие только угловые узлы, называются *линейными* и обеспечивают линейную интерполяцию геометрии и функций. Элементы, имеющие дополнительные узлы на своих границах между угловыми точками, могут обеспечивать квадратичную или даже кубическую интерполяцию (Рис.

9.14). В первом случае такие элементы называются *квадратичными*. Отметим также, что существуют элементы, имеющие внутренние узлы. Теоретически такие элементы обеспечивают более точное описание геометрии тела и искомых функций, однако широкого распространения данный тип элементов не получил. При наличии современных автоматических генераторов конечно-элементных сеток часто бывает проще и удобнее разбить конструкцию на большое число линейных элементов простой формы, чем использовать элементы высокого порядка, требующие для построения сетки значительной работы вручную. Элементы, не имеющие внутренних узлов, относятся к так называемому *серендипову семейству*.

**Геометрия элемента.** Геометрия элемента определяется расположением узловых точек. Большинство элементов, используемых в расчетах, имеют достаточно простую геометрическую форму. Например, в одномерном случае элементы обычно представляют собой прямолинейные отрезки или сегменты кривых линий; в двумерном случае элементы имеют трехстороннюю или четырехстороннюю форму; в трехмерных задачах наиболее распространены такие геометрические фигуры, как тетраэдры, призмы и гексаэдры (Рис. 9.14).

**Степени свободы.** Степени свободы определяют физическое состояние элемента, т.е. физическое поле, которое описывает данный элемент. Благодаря общим степеням свободы в соседних элементах осуществляется сборка модели и формирование глобальной системы конечно-элементных уравнений. В качестве степеней свободы могут фигурировать как узловые значения неизвестной функции, так и ее производные по пространственным координатам в узлах. В первом случае элементы относятся к типу *лагранжевых* элементов; во втором случае – типу *эрмитовых* элементов. Например, в простейшей задаче о растяжении стержня неизвестной функцией является продольное перемещение стержня. Соответственно в качестве степеней свободы выступают узловые значения данной функции и, следовательно, конечный элемент относится к лагранжевому типу. Наоборот,



в задаче об изгибе стержня неизвестной функцией является поперечное перемещение центральной оси стержня, а в качестве степеней свободы используются как узловые значения самой функции, так и ее производной по продольной координате. Физический смысл этой производной – угол поворота поперечного сечения стержня. Таким образом, конечный элемент, применяемый в расчетах стержня на изгиб, относится к типу эрмитовых элементов. Заметим также, что данные обозначения происходят от названия полиномов Лагранжа и Эрмита, широко используемых в прикладной математике для интерполяции функций по узловым значениям.

**Узловые силы.** Система узловых сил полностью соответствует степеням свободы элемента и выражается с помощью глобального вектора узловых сил.



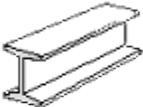







**Определяющие соотношения.** Для конечных элементов, используемых в механических расчетах, определяющее соотношение задает поведение материала, из которого изготовлена конструкция. Например, в качестве такого соотношения во многих случаях используется обобщенный закон Гука, связывающий тензор деформаций и тензор напряжений в точке. Для линейного упругого стержневого элемента достаточно задать один модуль Юнга  $E$  и один коэффициент температурного расширения  $\alpha$ .

**Свойства сечения.** К свойствам сечения относятся площади и моменты инерции одномерных и двумерных конечных элементов, таких как балки, стержни, пластины. В эту группу также входит толщина пластин и оболочек. При построении конечного элемента свойства сечений считаются заданными и входят в результирующую матрицу жесткости элемента.

### 9.5.2. Классификация конечных элементов, используемых в механике

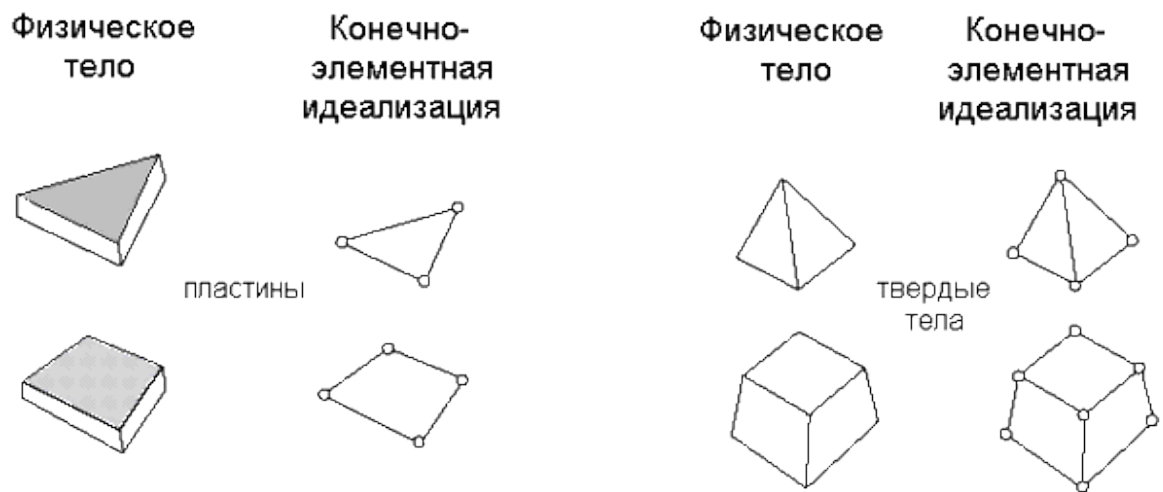
**Простейшие конструкционные элементы.** К простейшим структурным элементам относятся элементы типа стержень, балка, труба,

брус, панель, работающая на сдвиг (Рис. 9.15). Уравнения, описывающие данные элементы, выводятся из теоретических положений сопротивления материалов, т.е. из упрощенных механических формулировок. Исторически первыми стали использоваться именно эти типы конечных элементов.

Компонента физической конструкции (структуры)	Имя математической модели	Конечно-элементная дискретизация
	стержень	
	балка	
	труба	
	брус средней толщины	
	сдвиг панели	

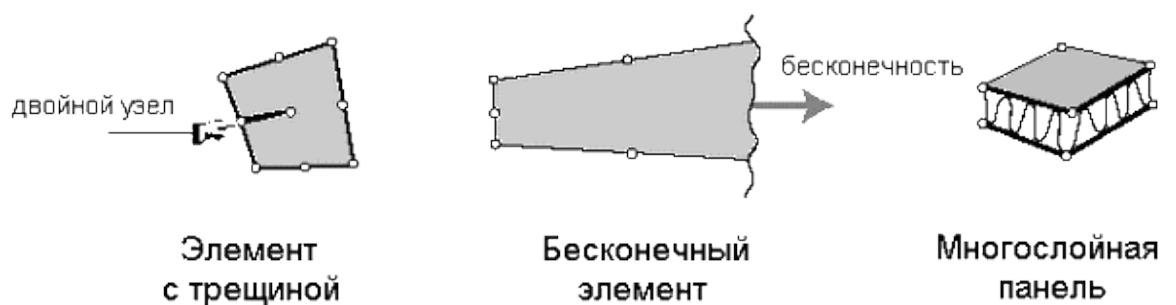
**Рис. 9.15.** Простейшие конструкционные элементы

**Континуальные элементы.** Континуальные элементы представляют собой конечные объемы или площади сплошной среды (континуума). Например, к континуальным элементам относятся пластины, оболочки, осесимметричные элементы, трехмерные твердотельные элементы (Рис. 9.16). Уравнения, описывающие данный тип конечных элементов, получаются из общих соотношений механики сплошной среды и, в частности, теории упругости.



**Рис. 9.16.** Континуальные конечные элементы.

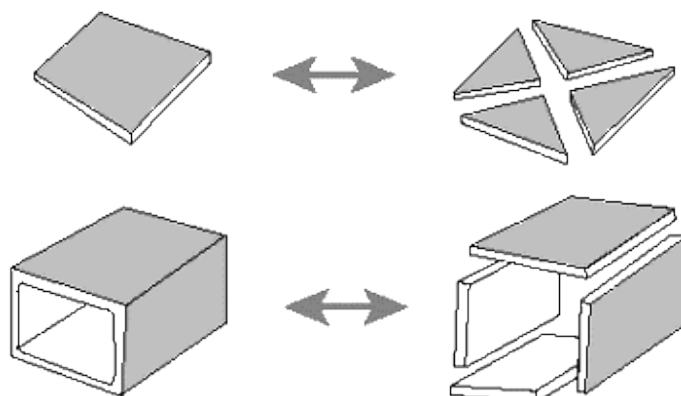
**Специальные элементы.** Специальные элементы обладают свойствами как конструкционных, так и континуальных элементов. Они выводятся из уравнений механики сплошной среды, но включают в себя некоторые особенности непосредственно связанные с физическими особенностями решаемых задач. В качестве примера можно привести следующие специальные элементы: элемент с трещиной для задач механики разрушения; многослойная панель; бесконечные и полубесконечные элементы; контактные и штрафные элементы; абсолютно твердотельные элементы (Рис. 9.17).



**Рис.9.17.** Специальные конечные элементы.

**Макроэлементы.** Макроэлементы представляют собой более сложный тип конечных элементов. Как правило, они получаются путем сборки из более

простых конструктивных элементов. Число таких элементов, входящих в макроэлемент, как правило, невелико (Рис. 9.18).



**Рис.9.18.** Макроэлементы

**Подструктуры.** Подструктуры можно определить как макроэлементы с явно выраженными структурными особенностями или функциями. Как правило, они получаются путем разделения полной конструкции на функциональные компоненты. Например, крылья и фюзеляж самолета, пролет и тросы подвесного моста. Заметим, что различия между понятиями полной конструкции, подструктур и макроэлементов не всегда очевидны и четко определены. Поэтому часто используется понятие суперэлемента как обобщенного названия для всех типов макроэлементов или подструктур, представляющих собой комбинацию простейших конструктивных элементов.

### **9.5.3. Ансамблирование**

Ансамблирование или сборка представляет собой объединение отдельных элементов в конечно-элементную сетку. С математической точки зрения ансамблирование состоит в объединении матриц жесткости отдельных элементов в одну глобальную матрицу жесткости всей конструкции. При этом существенно используются две системы нумерации узлов элементов:

локальная и глобальная. Локальная нумерация представляет собой фиксированную нумерацию узлов для каждого типа конечных элементов в соответствии с введенной локальной системой координат на элементе. Глобальная нумерация узлов всей конструкции может быть совершенно произвольной, также как и глобальная нумерация конечных элементов. Однако, между локальными номерами и глобальными номерами узлов существует взаимнооднозначное соответствие, на основе которого и формируется глобальная система конечно-элементных уравнений.

#### 9.5.4. Граничные условия

Согласно терминологии математической физики, рассматривающей различные дифференциальные уравнения, описывающие физические поля, с единой математической точки зрения, граничные или краевые условия для данных дифференциальных уравнений делятся на два основных типа: *существенные и естественные*. Обычно, существенные условия накладываются на искомую функцию, а естественные на ее производные по пространственным координатам. В математической физике естественные граничные условия получаются «естественным» образом вместе с исходными дифференциальными уравнениями (уравнениями Эйлера) из соответствующего вариационного принципа, в то время как существенные граничные условия должны выполняться независимо.

С позиции метода конечных элементов существенные граничные условия – это такие, которые непосредственно влияют на степени свободы модели и накладываются на компоненты глобального вектора неизвестных  $U$ . Наоборот, естественные граничные условия – это такие, которые опосредованно влияют на степени свободы через глобальную систему конечно-элементных уравнений и накладываются на правую часть системы – вектор  $F$ .

В задачах механики, как правило, к существенным граничным условиям относят те, которые включают в себя *перемещения* (но не деформации, представляющие собой производные перемещений по пространственным координатам). Согласно терминологии теории упругости такие граничные условия называются *кинематическими*. Например, заделка и шарнирное опирание в стержневых задачах представляют собой существенные, или кинематические, граничные условия, наложенные на прогиб или продольные перемещения точек стержня. Заметим, что в задаче изгиба стержня к существенным условиям относится также условия, наложенные на первую производную по продольной координате от прогиба стержня, которая имеет механический смысл угла поворота сечения стержня. Тоже можно сказать об углах поворота сечений в теории изгиба пластин.

К естественным граничным условиям в механических приложениях МКЭ относят условия, наложенные на различные внешние силовые факторы, действующие на точки поверхности тела – сосредоточенные силы и моменты в стержневых задачах; распределенные силы в двумерных и трехмерных задачах. Такие ограничения носят название *силовых* граничных условий.

В постановках задач механики сплошной среды, и в частности теории упругости, широко используются *смешанные* граничные условия. Это означает, что в данной точке поверхности тела одновременно заданы некоторые компоненты перемещений и поверхностных сил. Например, такие условия возникают при решении геометрически симметричных задач. Если остальные граничные условия и внешние силы также зеркально симметричны относительно некоторой плоскости, то смешанные граничные условия на плоскости симметрии представляют собой равенство нулю нормальных перемещений и равенство нулю касательных сил.

Перечисленные три варианта граничных условий наиболее распространены в чисто механических приложениях МКЭ. Однако, в междисциплинарных приложениях МКЭ, и в частности, при расчете температурных напряжений, граничные условия накладываются на различные

физические переменные и зависят от особенностей математической постановки соответствующих задач.

### 9.5.5. Стержневой конечный элемент. Матрица жесткости конечного элемента

Рассмотрим произвольный конечный элемент с числом степеней свободы  $n_{cm}$ .

Вектором узловых перемещений конечного элемента называется вектор, складывающийся из значений перемещений его узлов по направлению всех его степеней свободы. Очевидно, размерность вектора узловых перемещений равна числу степеней свободы элемента  $n_{cm}$ .

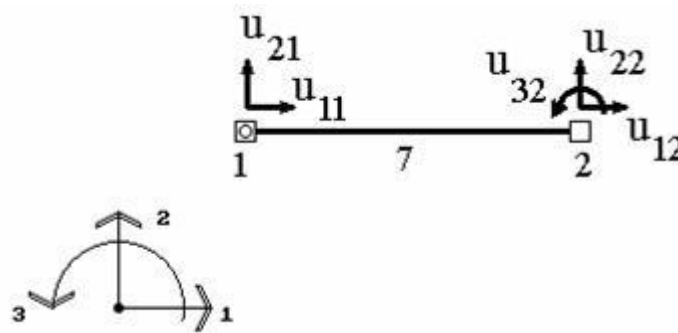


Рис.9.19

Например, для двухузлового элемента, имеющего в конечно-элементной схеме номер 7, характеризующегося тремя степенями свободы (рис.9.19),

$$U^{(7)} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}.$$

вектор узловых перемещений будет иметь следующий вид:

Здесь введены следующие обозначения:  $u_{jk}$  - перемещение узла  $k$  по направлению  $j$ ,  $U^{(e)}$  - вектор узловых перемещений узла  $e$ . Понятно, что если узел  $k$  шарнирный, то  $j$  может быть равно 1 или 2. Если же узел  $k$  жесткий, то  $j$  может быть равно 1, 2 или 3.

Аналогично вводится вектор узловых усилий, действующих на элемент. Его компонентами являются усилия, приложенные к элементу в узлах и действующие по направлению всех его степеней свободы. Для приведенного

$$R^{(7)} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(7)} \\ r_{21}^{(7)} \\ r_{12}^{(7)} \\ r_{22}^{(7)} \\ r_{32}^{(7)} \end{pmatrix}.$$

на рис.9.19 элемента этот вектор будет иметь вид (рис.9.20):

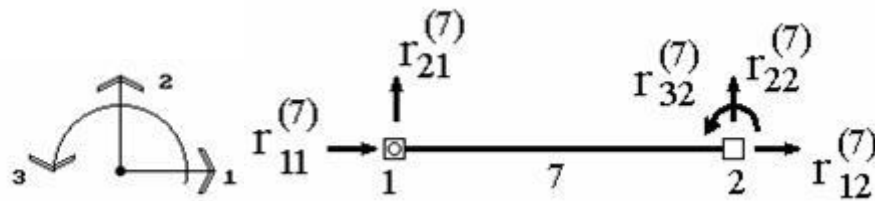


Рис.9.20

Здесь вводятся обозначения:  $r_{jk}^{(e)}$  - усилие, действующее на узел  $k$  элемента  $e$  по направлению  $j$ ,  $R^{(e)}$  - вектор узловых сил, действующих на элемент  $e$ .

Вектора  $R^{(e)}$  и  $U^{(e)}$  являются блочными, т.е. в них можно выделить блоки  $R_i^{(e)}$  и  $U_i$  соответственно, содержащие усилия и перемещения, относящиеся к  $i$ -ому узлу элемента.

$$U_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{pmatrix}$$

Если узел  $i$  - жесткий, то  $U_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{pmatrix}$ , если шарнирный, то  $U_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix}$ .

Аналогично выглядят и блоки вектора  $R^{(e)}$ .

Например, для рассматриваемого элемента (рис.9.19 и рис.9.20):

$$R^{(7)} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(7)} \\ r_{21}^{(7)} \\ - \\ r_{12}^{(7)} \\ r_{22}^{(7)} \\ r_{32}^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^{(7)} \\ R_2^{(7)} \end{pmatrix}, \quad U^{(7)} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ - \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$



Понятно, что при деформировании элемента в результате смещения одного из его узлов по направлению одной из степеней свободы на узлы элемента должны действовать внешние силы, препятствующие возвращению элемента в недеформируемое состояние. Подобная ситуация может возникнуть, например, при неравномерных осадках в опорах статически неопределимой стержневой системы (рис.9.21), реакции, возникшие в опорах, препятствуют возвращению конструкции в недеформированное состояние.

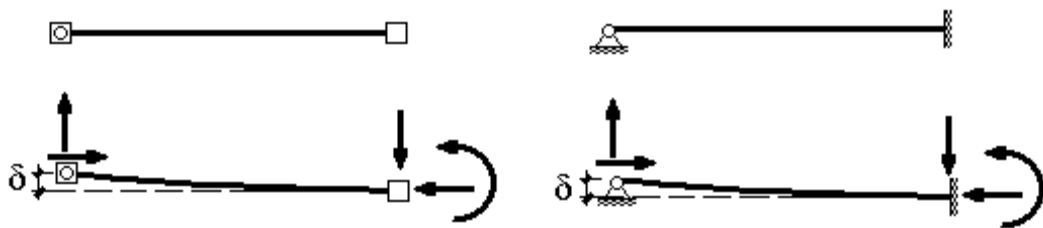


Рис.9.21

В рамках гипотезы линейного деформирования связь между перемещениями узлов элемента и силами, действующими при этом на него, должна быть линейной. Например, с увеличением смещения  $d$  вдвое, все усилия, действующие на узлы элемента также должны увеличиться вдвое.

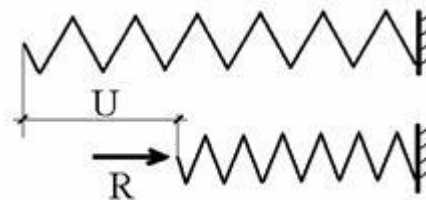
Основной характеристикой конечного элемента является матрица жесткости элемента  $K^{(e)}$ . Она связывает вектор узловых перемещений  $U^{(e)}$  и вектор приложенных к элементу узловых усилий  $R^{(e)}$  соотношением:

$$R^{(e)} = K^{(e)} \cdot U^{(e)}$$

,

(9.4)

выражающим линейный характер связи между действующими на узлы силами и узловыми перемещениями. Матрица жесткости элемента играет роль, аналогичную коэффициенту жесткости пружины  $K$ , связывающего приложенное к ней усилие  $R$ , и вызванное этим усилием перемещение  $U$  соотношением (рис.9.22)  $R = K \cdot U$ .



**Рис.9.22**

Поскольку вектора  $U^{(e)}$  и  $R^{(e)}$  имеют размерность  $n_{cm}$ , число строк и столбцов в матрице  $K^{(e)}$  тоже должно быть равным  $n_{cm}$ :

$$R^{(e)}(n_{cm} \times 1) = K^{(e)}(n_{cm} \times n_{cm}) \cdot U^{(e)}(n_{cm} \times 1).$$

Введем обозначение  $k_{ijmk}^{(e)}$  - усилие, действующее на узел  $m$  элемента  $e$  по направлению  $i$ , от единичного перемещения узла  $k$  этого же элемента  $e$  по направлению  $j$  при условии, что перемещения по направлению всех остальных степеней свободы в элементе равны нулю. Например,  $k_{1312}^{(5)}$  - усилие, действующее на узел 1 элемента 5 по направлению 1 при единичном перемещении узла 2 этого же элемента 5 по направлению 3, а  $k_{1111}^{(3)}$  - усилие, действующее на узел 1 элемента 3 по направлению 1 от единичного смещения этого же узла по этому же направлению. Последнее значение, как и любое значение  $k_{ijmk}^{(e)}$  в соответствии с теоремой Клапейрона всегда положительно, аналогично коэффициентам  $r_{ii}$  в уравнениях классического метода перемещений.

Важно четко помнить порядок индексов, стоящих при  $k$ . Верхний индекс - это номер элемента. Первые два нижних индекса - направления, причем первый из них - номер направления определяемого усилия, а второй - номер направления, в котором произошло единичное перемещение. Вторые два нижних индекса - номера узлов элемента, причем первый из них - номер узла, в котором определяется усилие, второй - в котором задано единичное перемещение.

Для рассматриваемого элемента (рис.9.19 и рис.9.20) матрица жесткости элемента имеет следующий вид:

$$K^{(7)} = \begin{pmatrix} k_{1111}^{(7)} & k_{1211}^{(7)} & k_{1112}^{(7)} & k_{1212}^{(7)} & k_{1312}^{(7)} \\ k_{2111}^{(7)} & k_{2211}^{(7)} & k_{2112}^{(7)} & k_{2212}^{(7)} & k_{2312}^{(7)} \\ k_{1121}^{(7)} & k_{1221}^{(7)} & k_{1122}^{(7)} & k_{1222}^{(7)} & k_{1322}^{(7)} \\ k_{2121}^{(7)} & k_{2221}^{(7)} & k_{2122}^{(7)} & k_{2222}^{(7)} & k_{2322}^{(7)} \\ k_{3121}^{(7)} & k_{3221}^{(7)} & k_{3122}^{(7)} & k_{3222}^{(7)} & k_{3322}^{(7)} \end{pmatrix}.$$

Легко увидеть, что каждый столбец этой матрицы состоит из усилий, действующих на узлы элемента при единичном смещении по направлению какой-либо из его степеней свободы при условии, что перемещения по направлению остальных степеней свободы равны нулю.

Например, первый столбец представляет собой усилия, действующие на узлы элемента при единичном смещении узла 1 (4-ый индекс при коэффициентах) по направлению 1 (2-ой индекс при коэффициентах) при условии, что перемещения по направлению остальных степеней свободы равны нулю. Второй столбец представляет собой усилия, действующие на узлы элемента при единичном смещении узла 1 (4-ый индекс при коэффициентах) по направлению 2 (2-ой индекс при коэффициентах) при условии, что перемещения по направлению остальных степеней свободы равны нулю (рис.9.23). И так далее.

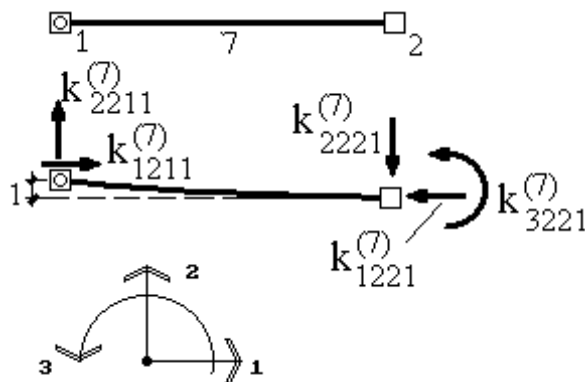


Рис.9.23

Докажем, что это действительно так, например, для первого столбца матрицы жесткости.

Зададим перемещение узла 1 по направлению 1 элемента равным 1, в то время как все его остальные узловые перемещения будем считать равными

$$U^{(7)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

нулю. В этом случае вектор узловых перемещений приобретает вид и равенство (9.4) становится следующим:

$$\begin{pmatrix} r_{11}^{(7)} \\ r_{21}^{(7)} \\ r_{12}^{(7)} \\ r_{22}^{(7)} \\ r_{32}^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1111}^{(7)} & k_{1211}^{(7)} & k_{1112}^{(7)} & k_{1212}^{(7)} & k_{1312}^{(7)} \\ k_{2111}^{(7)} & k_{2211}^{(7)} & k_{2112}^{(7)} & k_{2212}^{(7)} & k_{2312}^{(7)} \\ k_{1121}^{(7)} & k_{1221}^{(7)} & k_{1122}^{(7)} & k_{1222}^{(7)} & k_{1322}^{(7)} \\ k_{2121}^{(7)} & k_{2221}^{(7)} & k_{2122}^{(7)} & k_{2222}^{(7)} & k_{2322}^{(7)} \\ k_{3121}^{(7)} & k_{3221}^{(7)} & k_{3122}^{(7)} & k_{3222}^{(7)} & k_{3322}^{(7)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда:

$$\begin{pmatrix} r_{11}^{(7)} \\ r_{21}^{(7)} \\ r_{12}^{(7)} \\ r_{22}^{(7)} \\ r_{32}^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1111}^{(7)} \\ k_{2111}^{(7)} \\ k_{1121}^{(7)} \\ k_{2121}^{(7)} \\ k_{3121}^{(7)} \end{pmatrix},$$

т.е. компоненты первого столбца матрицы жесткости на самом деле оказались равными компонентам вектора усилий, действующих на узлы элемента при заданном смещении.

Придавая соответствующий вид вектору узловых перемещений, можно выполнить аналогичное доказательство для любого другого столбца матрицы жесткости элемента.

Для рассматриваемого элемента (рис.9.19) запишем матричное равенство (9.4) в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} r_{11}^{(7)} \\ r_{21}^{(7)} \\ r_{12}^{(7)} \\ r_{22}^{(7)} \\ r_{32}^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1111}^{(7)} & k_{1211}^{(7)} & k_{1112}^{(7)} & k_{1212}^{(7)} & k_{1312}^{(7)} \\ k_{2111}^{(7)} & k_{2211}^{(7)} & k_{2112}^{(7)} & k_{2212}^{(7)} & k_{2312}^{(7)} \\ k_{1121}^{(7)} & k_{1221}^{(7)} & k_{1122}^{(7)} & k_{1222}^{(7)} & k_{1322}^{(7)} \\ k_{2121}^{(7)} & k_{2221}^{(7)} & k_{2122}^{(7)} & k_{2222}^{(7)} & k_{2322}^{(7)} \\ k_{3121}^{(7)} & k_{3221}^{(7)} & k_{3122}^{(7)} & k_{3222}^{(7)} & k_{3322}^{(7)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

или:

$$\begin{cases} r_{11}^{(7)} = u_{11} \cdot k_{1111}^{(7)} + u_{21} \cdot k_{1211}^{(7)} + u_{12} \cdot k_{1112}^{(7)} + u_{22} \cdot k_{1212}^{(7)} + u_{32} \cdot k_{1312}^{(7)} \\ r_{21}^{(7)} = u_{11} \cdot k_{2111}^{(7)} + u_{21} \cdot k_{2211}^{(7)} + u_{12} \cdot k_{2112}^{(7)} + u_{22} \cdot k_{2212}^{(7)} + u_{32} \cdot k_{2312}^{(7)} \\ r_{12}^{(7)} = u_{11} \cdot k_{1121}^{(7)} + u_{21} \cdot k_{1221}^{(7)} + u_{12} \cdot k_{1122}^{(7)} + u_{22} \cdot k_{1222}^{(7)} + u_{32} \cdot k_{1322}^{(7)} \\ r_{22}^{(7)} = u_{11} \cdot k_{2121}^{(7)} + u_{21} \cdot k_{2221}^{(7)} + u_{12} \cdot k_{2122}^{(7)} + u_{22} \cdot k_{2222}^{(7)} + u_{32} \cdot k_{2322}^{(7)} \\ r_{32}^{(7)} = u_{11} \cdot k_{3121}^{(7)} + u_{21} \cdot k_{3221}^{(7)} + u_{12} \cdot k_{3122}^{(7)} + u_{22} \cdot k_{3222}^{(7)} + u_{32} \cdot k_{3322}^{(7)} \end{cases}$$

Физический смысл любого из уравнений данной системы очевиден.

Если узел  $k$  элемента  $e$  получает по направлению  $j$  единичное перемещение, то усилие, действующее при этом на узел  $t$  по направлению  $i$  равно  $k_{ijmk}^{(e)}$ . Если же это перемещение будет равно не единице, а  $u_{jk}$ , то в соответствии с линейным законом связи между усилиями и перемещениями, рассматриваемое усилие увеличится также в  $u_{jk}$  раз и составит  $u_{jk} \cdot k_{ijmk}^{(e)}$ .

Пусть теперь все узлы элемента получают смещения по направлению всех имеющихся у элемента степеней свобод. Тогда, в соответствии с принципом суперпозиций, усилие  $r_{im}^{(e)}$ , т.е. усилие, действующее на какой-либо узел  $t$  по какому-либо направлению  $i$ , будет представлять собой сумму усилий, вызванных смещениями всех узлов элемента по направлению всех имеющихся степеней свобод (рис.9.24). Поскольку, как мы только что выяснили, при перемещении какого-либо узла  $k$  по направлению  $j$  на величину  $u_{jk}$  на узел  $t$  по направлению  $i$  будет действовать усилие  $u_{jk} \cdot k_{ijmk}^{(e)}$ , суммарное усилие, действующее на узел  $t$  по направлению  $j$ , будет представлять собой сумму величин  $u_{jk} \cdot k_{ijmk}^{(e)}$  для всех степеней свободы элемента (рис.9.24).

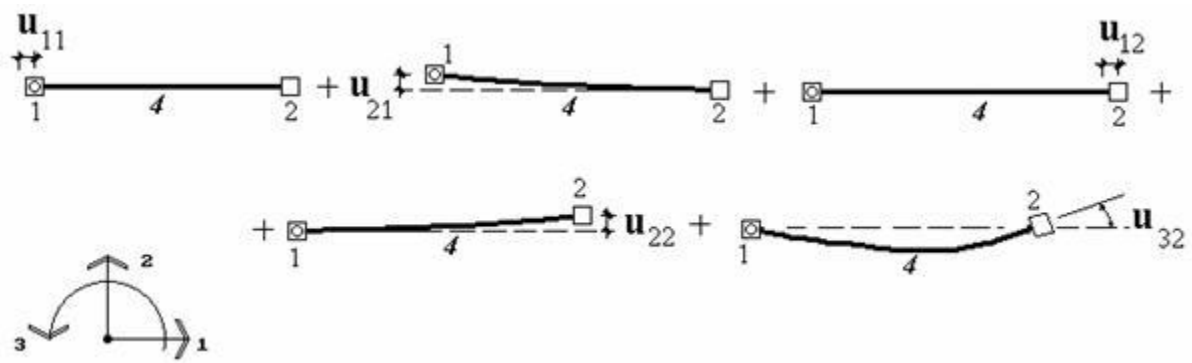


Рис.9.24

Формально это можно записать следующим образом:

$$r_{im}^{(e)} = \sum_{t \in e} \sum_{j=1}^{n_t} u_{jt} \cdot k_{ijmt}^{(e)}$$

(9.5)

где  $t$  - номер узла, входящего в элемент  $e$ , запись  $t \in e$  означает, что суммирование производится по всем узлам, входящим в элемент  $e$ ,  $n_t$  - число степеней свободы в узле  $t$ . Причем,  $n_t=2$ , если узел  $t$  - шарнирный, и  $n_t=3$ , если узел  $t$  жесткий.

Как мы уже выяснили, элементы, стоящие на главной диагонали матрицы жесткости элемента должны быть положительными. Кроме того, матрица жесткости элемента должна быть симметричной. Действительно, в соответствии с теоремой взаимности реакций, усилие, действующее на узел  $m$  по направлению  $i$ , от единичного перемещения узла  $k$  этого же элемента по направлению  $j$  должно равняться усилию, действующему на узел  $k$  по направлению  $j$ , от единичного перемещения узла  $m$  этого же элемента по направлению  $i$ , т.е.  $k_{ijmk}^{(e)} = k_{jikm}^{(e)}$ .

Аналогично векторам  $R^{(e)}$  и  $U^{(e)}$  матрица жесткости элемента  $K^{(e)}$  также является блочной. Она состоит из блоков  $K_{mk}^{(e)}$ , каждый из которых содержит коэффициенты, связывающие перемещения  $k$ -го узла элемента и реакции, возникающие при этом, в  $m$ -ом узле данного элемента.

Например, для рассматриваемого элемента (рис.9.19):

$$K^{(7)} = \left( \begin{array}{cc|cc} k_{1111}^{(7)} & k_{1211}^{(7)} & k_{1112}^{(7)} & k_{1212}^{(7)} & k_{1312}^{(7)} \\ k_{2111}^{(7)} & k_{2211}^{(7)} & k_{2112}^{(7)} & k_{2212}^{(7)} & k_{2312}^{(7)} \\ \hline k_{1121}^{(7)} & k_{1221}^{(7)} & k_{1122}^{(7)} & k_{1222}^{(7)} & k_{1322}^{(7)} \\ k_{2121}^{(7)} & k_{2221}^{(7)} & k_{2122}^{(7)} & k_{2222}^{(7)} & k_{2322}^{(7)} \\ k_{3121}^{(7)} & k_{3221}^{(7)} & k_{3122}^{(7)} & k_{3222}^{(7)} & k_{3322}^{(7)} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(4)} \\ K_{21}^{(4)} & K_{22}^{(4)} \end{pmatrix}$$